

Tag der Mathematik 2017

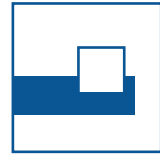
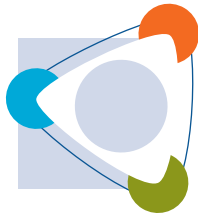
Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

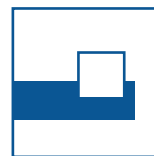
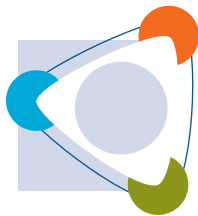
Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!



Aufgabe G1

Eine Urne enthält blaue und rote Kugeln. Vor der Ziehung ist die Wahrscheinlichkeit eine blaue Kugel zu ziehen $\frac{1}{4}$. Nach der Ziehung einer blauen Kugel ist die Wahrscheinlichkeit eine weitere blaue Kugel zu ziehen $\frac{1}{5}$.

Wie viele rote Kugeln sind in der Urne?

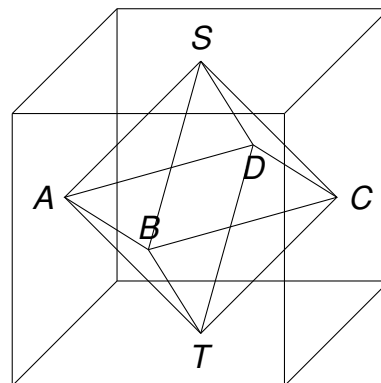


Aufgabe G2

Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen, so erhält man ein Oktaeder mit den Ecken A , B , C , D , S und T .

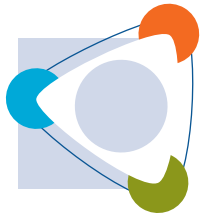
In einem Koordinatensystem sind vier Eckpunkte des Oktaeders

$$A(13 \mid -5 \mid 3), B(11 \mid 3 \mid 1), C(5 \mid 3 \mid 7), S(13 \mid 1 \mid 9)$$



Berechnen Sie

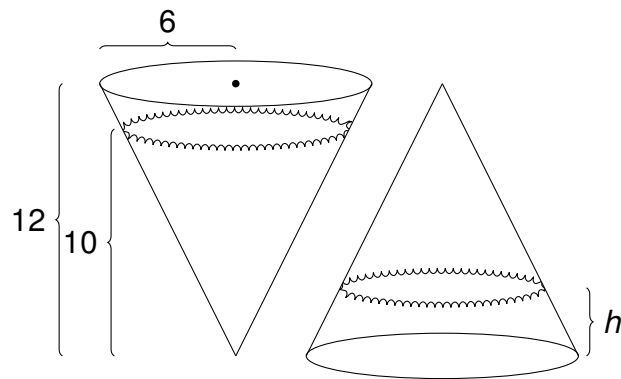
- die Länge der Würfelkante,
- die Oberfläche des Oktaeders,
- die Koordinaten von D und T .

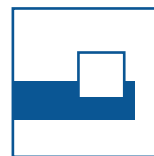


Aufgabe G3

Ein Kegel mit der Höhe 12 cm und dem Grundkreisradius 6 cm steht auf der Spitze und wird teilweise mit Wasser gefüllt, das 10 cm hoch steht.

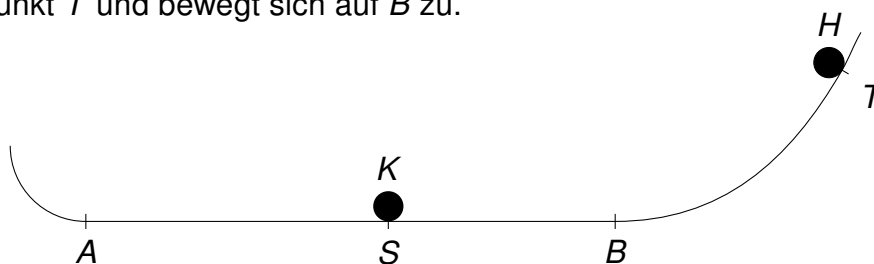
Wie hoch steht das Wasser, wenn der Kegel umgedreht wird?





Aufgabe G4

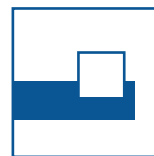
Zwei Kugeln K und H bewegen sich reibungsfrei auf einer Kugelbahn, die zwischen A und B waagrecht verläuft. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist K im Punkt S , der die Strecke AB im Verhältnis $4 : 3$ teilt. Zum gleichen Zeitpunkt ist H im Punkt T und bewegt sich auf B zu.



Bewegt sich die Kugel K in S mit der Geschwindigkeit $1,5 \text{ m/s}$ nach rechts, dann stößt sie mit der Kugel H in B zusammen.

Bewegt sich die Kugel K in S mit der Geschwindigkeit $1,5 \text{ m/s}$ nach links, dann stoßen K und H in A zusammen.

Welche Geschwindigkeit hat die Kugel H beim Zusammenprall?
(Der Durchmesser der Kugeln ist zu vernachlässigen.)

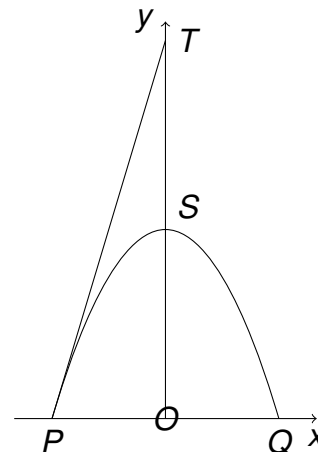


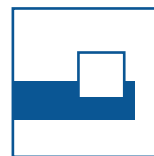
Aufgabe E1

Die Parabel $f(x) = -ax^2 + c$, $a > 0$, $c > 0$, habe den Scheitel S sowie die Nullstellen P und Q .

Die Tangente in P schneide die y -Achse in T .

Berechnen Sie $\frac{OS}{ST}$.

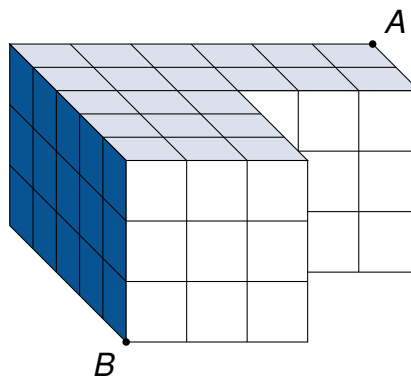


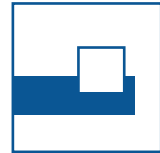
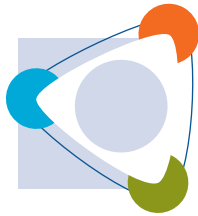


Aufgabe E2

Ein L-förmiger Block wird wie abgebildet aus 63 weißen Einheitswürfeln gebildet.

- Wie groß ist die Oberfläche?
- Welchen Abstand haben A und B ?
- Bei dem L-förmigen Block wird die ganze Oberfläche rot angestrichen. Wie viele der 63 Würfel haben genau
 - eine rote Fläche,
 - zwei rote Flächen,
 - drei rote Flächen?
 - Wie viele Würfel haben keine rote Fläche?

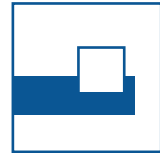
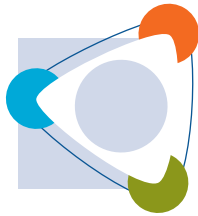




Aufgabe E3

Bestimmen Sie u so, dass die Summe der Kehrwerte der Lösungen der quadratischen Gleichung maximal wird.

$$u^2x^2 + (u - 3)x + \frac{1}{u + 1} = 0.$$



Aufgabe E4

a) Zeigen Sie

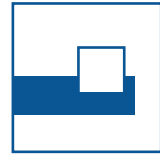
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

b) Für welche x gilt $\log_4(x^2 + 2x - 8) = \log_2 x$?



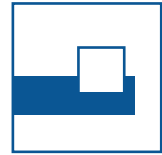
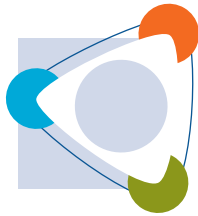
Tag der Mathematik 2017

Aufgabe H1



Aufgabe H1

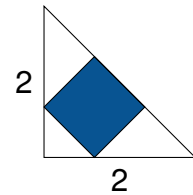
Welches ist die letzte Ziffer von 2017^{2017} ?



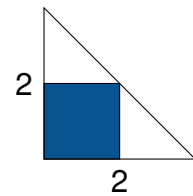
Aufgabe H2

In ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck (Kathetenlänge 2) wird ein Quadrat so einbeschrieben, dass

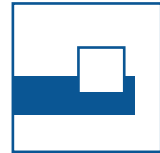
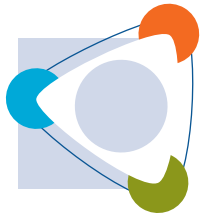
a) eine Seite auf der Hypotenuse liegt,



b) zwei Seiten auf den Katheten liegen.

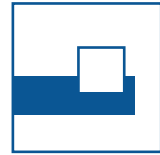
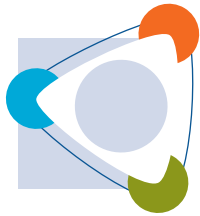


Welches Quadrat hat die größere Fläche? Berechnen Sie beide Flächen!



Aufgabe H3

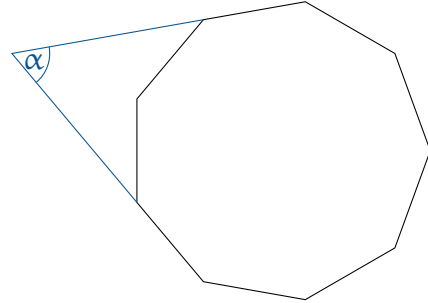
Für welche ganzen Zahlen n ist $\frac{6}{n+2}$ eine ganze Zahl?

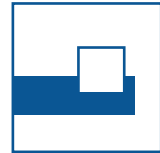
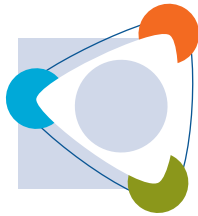


Aufgabe H4

Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck.

Wie groß ist der Winkel α ?





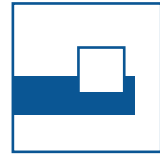
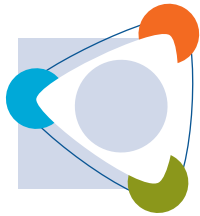
Aufgabe H5

Venedig liegt auf der geografischen Breite von 45° .

Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Stadt bei der Erdrotation?

Hinweis:

Rechnen Sie mit einem Erdradius von $R = 2000\pi$ [km], $\pi^2 = 10$ und $\sqrt{2} = 1,4$.

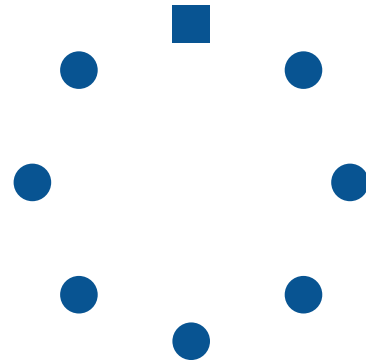


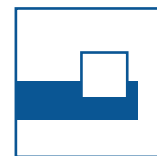
Aufgabe H6

In einem Garten liegen eine quadratische und sieben runde Steinplatten kreisförmig im Gras.

Minnie steht auf der quadratischen Platte und wirft eine Münze. Bei „Kopf“ hüpft sie im Uhrzeigersinn eine Platte weiter, bei „Zahl“ hüpft sie eine Platte entgegen dem Uhrzeigersinn.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht sie nach 8-maligem Münzwurf und Hüpfen wieder auf der quadratischen Platte?



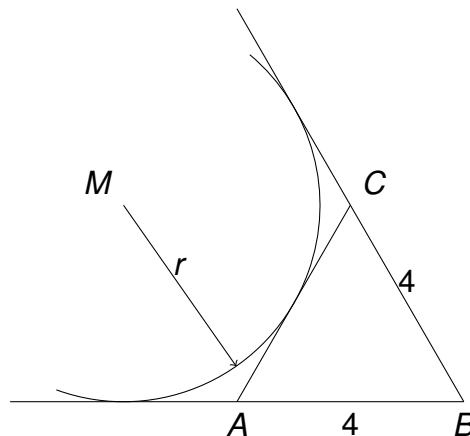


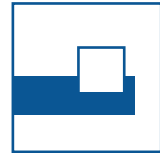
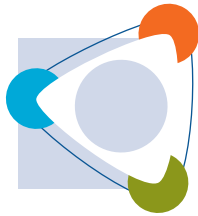
Aufgabe H7

Ein gleichseitiges Dreieck ABC habe die Seitenlänge 4 cm.

Verlängert man zwei der Seiten, lässt sich ein Kreis finden, der sowohl an den verlängerten Seiten des Dreiecks als auch an der verbleibenden Dreieckseite anliegt.

Wie groß ist der Kreisradius?





Aufgabe H8

Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S der beiden folgenden Geraden?

$$628x + 372y = 5512$$

$$372x + 628y = 4488$$