Tag der Mathematik 2017

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

Eine Urne enthält blaue und rote Kugeln. Vor der Ziehung ist die Wahrscheinlichkeit eine blaue Kugel zu ziehen $\frac{1}{4}$. Nach der Ziehung einer blauen Kugel ist die Wahrscheinlichkeit eine weitere blaue Kugel zu ziehen $\frac{1}{5}$.

Wie viele rote Kugeln sind in der Urne?

Lösung

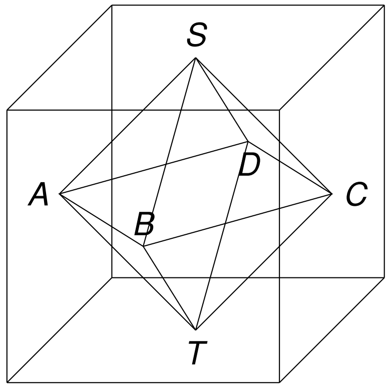
Sei n die Anzahl aller Kugeln und b die Anzahl der blauen Kugeln. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= p(\text{erste Kugel ist blau}) &= \frac{b}{n} \qquad \text{und} \\ \frac{1}{5} &= p(\text{zweite Kugel ist blau}) &= \frac{b-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Aus $4b = n$ und $5b - 5 = n - 1$ folgt $b = 4$ und $n = 16$.

Also sind $n - b = 16 - 4 = 12$ rote Kugeln in der Urne.

Aufgabe G2



Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen, so erhält man ein Oktaeder mit den Ecken A, B, C, D, S und T.

In einem Koordinatensystem sind vier Eckpunkte des Oktaeders

$A(13\,|\,{-5}\,|\,3)$, $B(11\,|\,3\,|\,1)$, $C(5\,|\,3\,|\,7)$, $S(13\,|\,1\,|\,9)$

Berechnen Sie

a) die Länge der Würfelkante,

b) die Oberfläche des Oktaeders,

c) die Koordinaten von D und T.

Lösung

a) Sei r die Länge der Würfelkante. Dann gilt

$$r = AC = \sqrt{(13-5)^2 + (-5-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{144} = 12.$$

b) Sei s die Länge der Oktaederkante. Dann gilt

$$s = AB = \sqrt{(13-11)^2 + (-5-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Für die Oberfläche gilt dann

$$8 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = 144\sqrt{3}.$$

c) *1. Lösung:*
Für den Mittelpunkt M von AC gilt $M(\frac{1}{2}(13+5)\,|\,\frac{1}{2}(-5+3)\,|\,\frac{1}{2}(3+7))$, also $M(9\,|\,{-1}\,|\,5)$. Ist O der Ursprung des Koordinatensystems, so folgt

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9-11 \\ -1-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix},$$

also D$(7\,|\,-5\,|\,9)$ und

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9-13 \\ -1-\ \ 1 \\ 5-\ \ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also T$(5\,|\,-3\,|\,1)$.

2. Lösung:
Für den Mittelpunkt M von AC gilt

$$M = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(13+5, -5+3, 3+7) = \frac{1}{2}(18, -2{,}10).$$

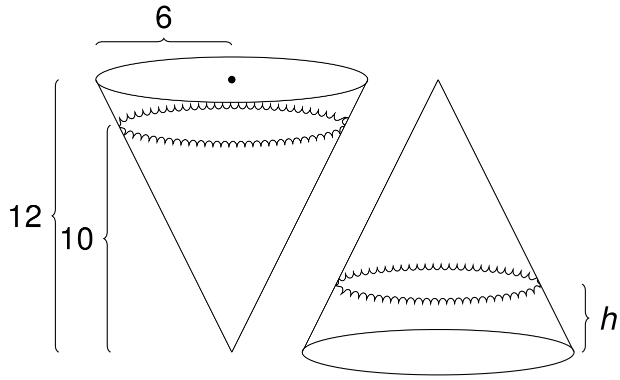
Hiermit folgt

$$D = 2M - B = (7, -5{,}9) \quad \text{und} \quad T = 2M - S = (5, -3{,}1).$$

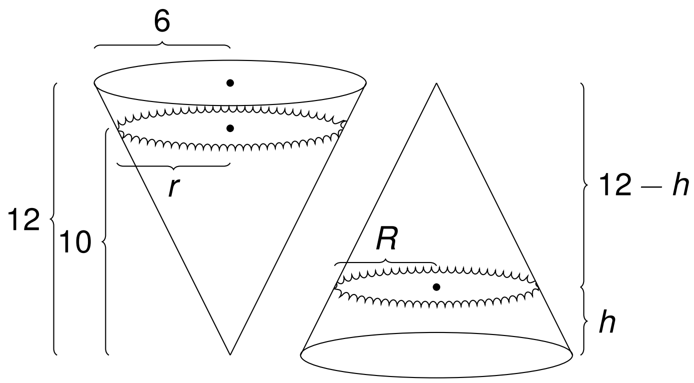
Aufgabe G3

Ein Kegel mit der Höhe 12 cm und dem Grundkreisradius 6 cm steht auf der Spitze und wird teilweise mit Wasser gefüllt, das 10 cm hoch steht.

Wie hoch steht das Wasser, wenn der Kegel umgedreht wird?



Lösung



Kegelvolumen: $\frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 12 = 144\pi$. Aus $\frac{r}{10} = \frac{6}{12}$ folgt $r = 5$.

Wasservolumen: $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 10 = \frac{250}{3}\pi$. Aus $\frac{12-h}{R} = \frac{12}{6}$ folgt $R = \frac{1}{2}(12-h)$.

Für das Volumen des Kegelstumpfes gilt dann:

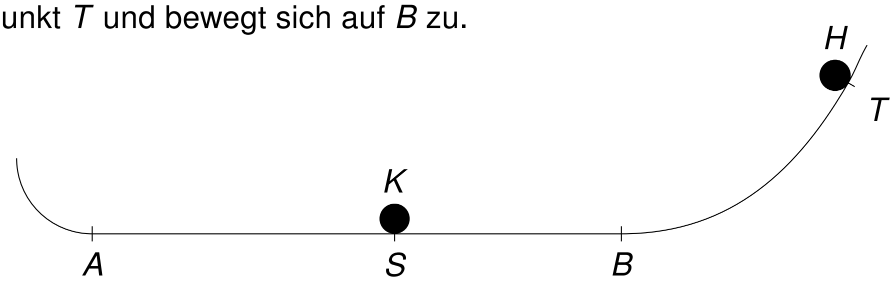
$$\begin{aligned} \frac{250}{3}\pi &= 144\pi - \frac{1}{3}\pi R^2\,(12-h) \\ \frac{250}{3} &= 144 \quad - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(12-h)^3 \end{aligned}$$

Aus $(12-h)^3 = 12^3 - 10^3$ folgt

$$h = 12 - \sqrt[3]{12^3 - 10^3} = 12 - \sqrt[3]{728}$$

Aufgabe G4

Zwei Kugeln K und H bewegen sich reibungsfrei auf einer Kugelbahn, die zwischen A und B waagrecht verläuft. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist K im Punkt S, der die Strecke AB im Verhältnis 4 : 3 teilt. Zum gleichen Zeitpunkt ist H im Punkt T und bewegt sich auf B zu.



Bewegt sich die Kugel K in S mit der Geschwindigkeit 1,5 m/s nach rechts, dann stößt sie mit der Kugel H in B zusammen.
Bewegt sich die Kugel K in S mit der Geschwindigkeit 1,5 m/s nach links, dann stoßen K und H in A zusammen.

Welche Geschwindigkeit hat die Kugel H beim Zusammenprall?
(Der Durchmesser der Kugeln ist zu vernachlässigen.)

Lösung

1. Lösung:
Seien $AS = 4a$ und $BS = 3a$.

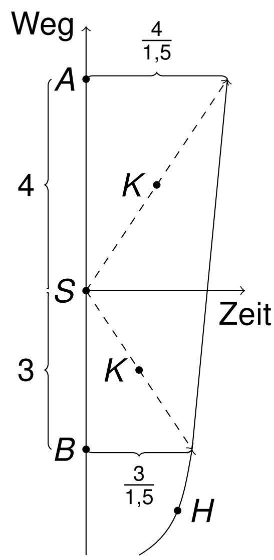
Die Laufzeit der Kugel K von S nach A ist $\frac{4a}{1{,}5} = \frac{8a}{3}$
und die von S nach B ist $\frac{3a}{1{,}5} = 2a$.

Für die Kugel H seien t die Zeit, die sie von T bis B braucht und v ihre Geschwindigkeit in B und in A.

Dann gilt $t = 2a$ und $t + \frac{7a}{v} = \frac{8a}{3}$.

Daraus folgt $2a + \frac{7a}{v} = \frac{8a}{3}$, also $\frac{7}{v} = \frac{2}{3}$ und damit $v = \frac{21}{2}$.

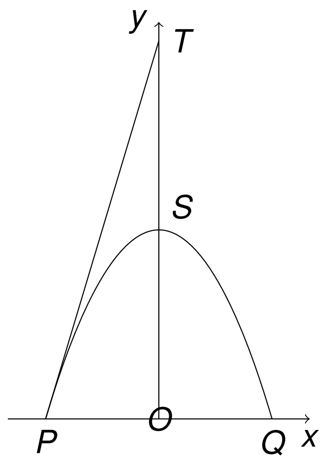
Also $v = 10{,}5$ m/s.



2. Lösung:
Geschwindigkeit von H:

$$\frac{3+4}{\frac{4}{1{,}5} - \frac{3}{1{,}5}} = 7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5 \text{ m/s}$$

Aufgabe E1



Die Parabel $f(x) = -ax^2 + c$, $a > 0$, $c > 0$, habe den Scheitel S sowie die Nullstellen P und Q.

Die Tangente in P schneide die y-Achse in T.

Berechnen Sie $\dfrac{OS}{ST}$.

Lösung

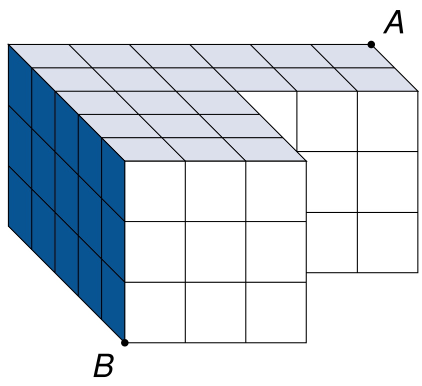
Nullstellen von f für $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Scheitel $S(0,c)$.

Tangente in $P(-\sqrt{\frac{c}{a}}\,|\,0)$: $y = 2a\sqrt{\dfrac{c}{a}} \cdot x + 2c$.

Somit $T(0\,|\,2c)$ und $\dfrac{0S}{ST} = \dfrac{c}{c} = 1$.

Aufgabe E2



Ein L-förmiger Block wird wie abgebildet aus 63 weißen Einheitswürfeln gebildet.

a) Wie groß ist die Oberfläche?

b) Welchen Abstand haben A und B?

c) Bei dem L-förmigen Block wird die ganze Oberfläche rot angestrichen. Wie viele der 63 Würfel haben genau

(i) eine rote Fläche,

(ii) zwei rote Flächen,

(iii) drei rote Flächen?

(iv) Wie viele Würfel haben keine rote Fläche?

Lösung

a) Oberfläche: $2 \cdot 21 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 15 = 108$.

b) Abstand: $\sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{70}$

c)

Anzahl der roten Flächen	Obere und untere Schicht	Mittlere Schicht	Anzahl
0	0	4	4
1	$4 + 4$	12	20
2	$12 + 12$	5	29
3	$5 + 5$	0	10

Summe: 63

Aufgabe E3

Bestimmen Sie u so, dass die Summe der Kehrwerte der Lösungen der quadratischen Gleichung maximal wird.

$$u^2x^2 + (u-3)x + \frac{1}{u+1} = 0.$$

Lösung

1. Lösung:
Lösungen sind:

$$x_{1,2} = \frac{3-u \pm \sqrt{(u-3)^2 - \frac{4u^2}{u+1}}}{2u^2}$$

Die Funktion

$$f(u) := \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2u^2}{3-u+\sqrt{\cdots}} + \frac{2u^2}{3-u-\sqrt{\cdots}} = (3-u)(u+1)$$

ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $u = 3$ und $u = -1$, also erhält man für $u = \frac{3-1}{2} = 1$ das Maximum.

2. Lösung:
Seien a und b die Lösungen der Gleichung. Dann gilt

$$x^2 + \frac{u-3}{u^2}x + \frac{1}{u^2(u+1)} = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

und somit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{-\frac{u-3}{u^2}}{\frac{1}{u^2(u+1)}} = (3-u)(u+1) = 3 + 2u - u^2 = 4 - (u-1)^2$$

Also ist das Maximum für $u = 1$.

Aufgabe E4

a) Zeigen Sie
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

b) Für welche x gilt $\log_4(x^2 + 2x - 8) = \log_2 x$?

Lösung

a) Für $x := \log_a b$ gilt
$$a^x = b$$
und somit
$$x \cdot \log_c a = \log_c b$$
also
$$x = \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

b) Aus
$$\log_4(x^2 + 2x - 8) = \log_2 x$$
folgt mit a)
$$\frac{\log_2(x^2 + 2x - 8)}{\log_2 4} = \log_2 x$$
und – wegen $\log_2 4 = 2$ –
$$\log_2(x^2 + 2x - 8) = 2 \cdot \log_2 x.$$
Aus
$$\log_2(x^2 + 2x - 8) = \log_2(x^2)$$
folgt
$$x^2 + 2x - 8 = x^2$$
und somit
$$x = 4.$$

Aufgabe H1

Welches ist die letzte Ziffer von 2017^{2017}?

Lösung

Die letzten Ziffern der Potenzen von 7 sind

$$7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots,$$

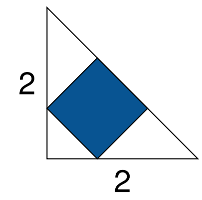
haben also die Periode 4.

Wegen $2017 = 504 \cdot 4 + 1$ ist 7 die letzte Ziffer.

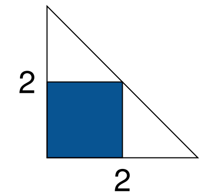
Aufgabe H2

In ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck (Kathetenlänge 2) wird ein Quadrat so einbeschrieben, dass

a) eine Seite auf der Hypotenuse liegt,

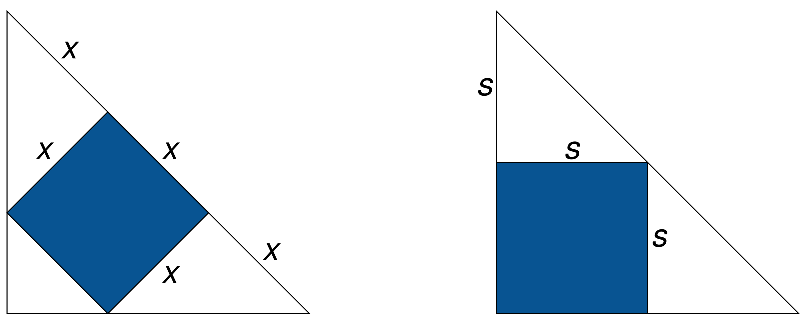


b) zwei Seiten auf den Katheten liegen.



Welches Quadrat hat die größere Fläche? Berechnen Sie beide Flächen!

Lösung



a) Für die Seite x gilt $3x = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, also $x^2 = \frac{8}{9}$.

b) Für die Seite s gilt $2s = 2$, also $s^2 = 1$.

Wegen $s^2 > x^2$ ist das Quadrat von b) größer.

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H3

Für welche ganzen Zahlen n ist $\dfrac{6}{n+2}$ eine ganze Zahl?

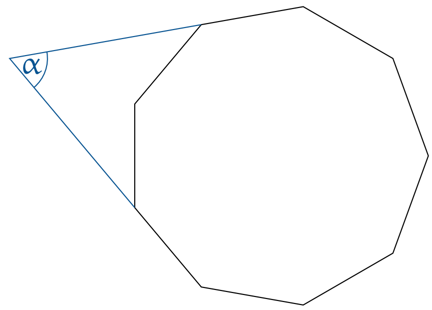
Lösung

$n+2$ muss ein ganzzahliger Faktor von 6 sein, das heißt $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Für n folgt also $-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4$.

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H4



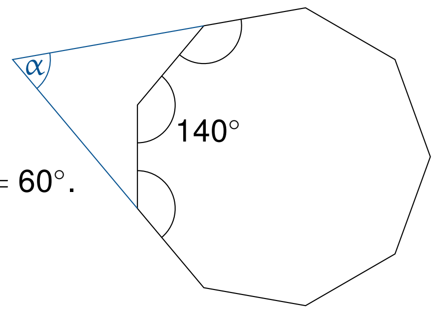
Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck.

Wie groß ist der Winkel α?

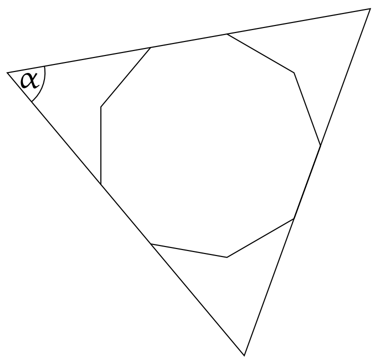
Lösung

1. Lösung:
Der Innenwinkel im regelmäßigem n-Eck ist $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, für $n = 9$ also 140°.

Somit gilt $\alpha + 40^\circ + 220^\circ + 40^\circ = 360^\circ$, also $\alpha = 60^\circ$.



2. Lösung:
Das Dreieck ist gleichseitig, also ist $\alpha = 60^\circ$.



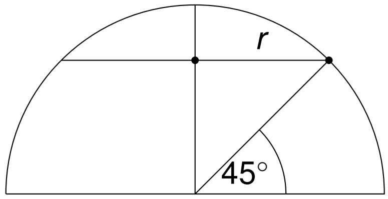
Aufgabe H5

Venedig liegt auf der geografischen Breite von $45°$.

Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Stadt bei der Erdrotation?

Hinweis:
Rechnen Sie mit einem Erdradius von $R = 2000\pi$ [km], $\pi^2 = 10$ und $\sqrt{2} = 1{,}4$.

Lösung



Es ist $r = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1000\pi\sqrt{2}$.

So ergibt sich eine Geschwindigkeit von

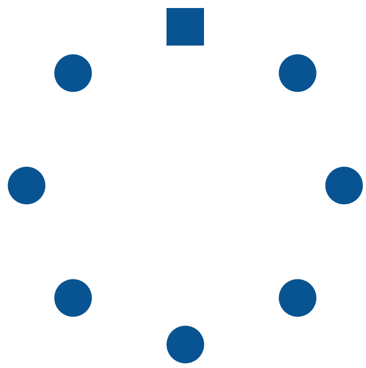
$$\frac{2\pi r}{24} = \frac{2000\pi^2\sqrt{2}}{24} = \frac{7}{6} \cdot 1000 \approx 1167 \text{ [km/h]}.$$

Aufgabe H6

In einem Garten liegen eine quadratische und sieben runde Steinplatten kreisförmig im Gras.

Minnie steht auf der quadratischen Platte und wirft eine Münze. Bei „Kopf“ hüpft sie im Uhrzeigersinn eine Platte weiter, bei „Zahl“ hüpft sie eine Platte entgegen dem Uhrzeigersinn.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht sie nach 8-maligem Münzwurf und Hüpfen wieder auf der quadratischen Platte?



Lösung

Es gibt drei Möglichkeiten um wieder auf die quadratische Platte zu gelangen:

- 8-maliges Hüpfen im Uhrzeigersinn: $(\frac{1}{2})^8$
- 8-maliges Hüpfen entgegen dem Uhrzeigersinn: $(\frac{1}{2})^8$
- 4-mal vorwärts und 4-mal rückwärts: $\frac{\binom{8}{4}}{2^8} = \frac{70}{256}$

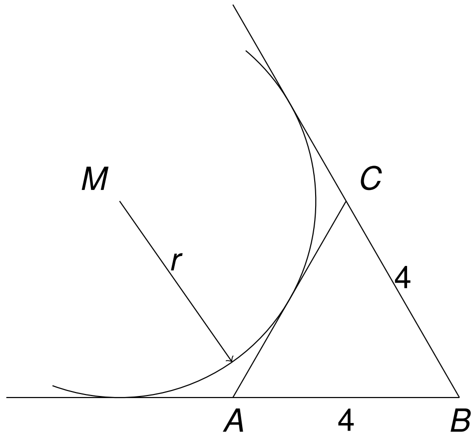
Wahrscheinlichkeit: $\frac{72}{256} = \frac{9}{32} \approx 0{,}28$

Aufgabe H7

Ein gleichseitiges Dreieck *ABC* habe die Seitenlänge 4 cm.

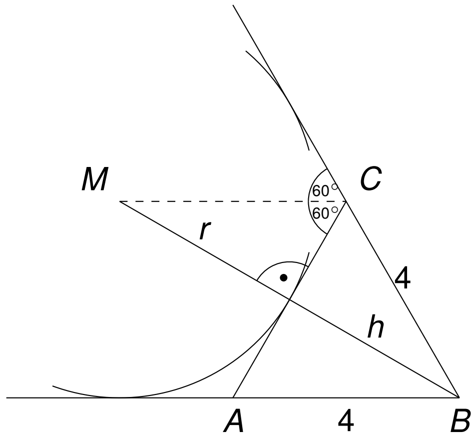
Verlängert man zwei der Seiten, lässt sich ein Kreis finden, der sowohl an den verlängerten Seiten des Dreiecks als auch an der verbleibenden Dreieckseite anliegt.

Wie groß ist der Kreisradius?



Lösung

Der Ankreisradius r ist gleich der Höhe h im Dreieck *ABC*, also $r = \frac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.



Aufgabe H8

Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S der beiden folgenden Geraden?

$$628x + 372y = 5512$$
$$372x + 628y = 4488$$

Lösung

Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$1000(x + y) = 10000$$

und

$$256(x - y) = \quad 1024.$$

Aus $x + y = 10$ und $x - y = 4$ folgt $S(7\,|\,3)$.

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de