

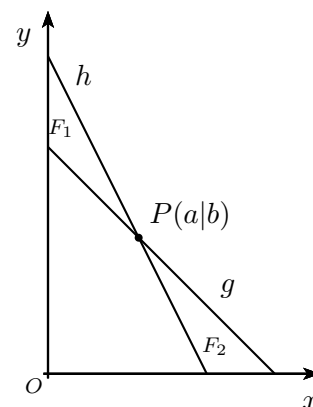
Musteraufgaben zum
 Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2018

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Einführungsphase werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss dabei klar erkennbar sein. Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 01. Februar 2018 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW-E.

- 1.) a) Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0|0)$ und Radius 5. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(4|3)$.

- b) Gegeben ist ein Punkt $P(a|b)$ im 1. Quadranten sowie zwei Geraden g und h durch P mit den Steigungen -1 bzw. -2 .

Berechnen Sie die Flächen F_1 und F_2 der beiden Dreiecke, die von g und h sowie den Koordinatenachsen begrenzt werden.



2. a) Bei der Multiplikation $55 \cdot 55 = 4444$ sind 55 und 4444 Zahlen im Stellenwertsystem zur Basis b . Berechnen Sie b .

- b) Die Multiplikationen

$$998 \cdot 889 = 887222, \quad 93 \cdot 89 = 8277 \quad \text{und} \quad 9 \cdot 8 = 72$$

erfolgen bei der sogenannten *Indischen Multiplikation* nach folgendem Schema:

$\begin{array}{r} 998 \quad 2 \\ \underline{889 \quad 111} \\ 887 \quad 222 \end{array}$	$\begin{array}{r} 93 \quad 7 \\ \underline{89 \quad 11} \\ 82 \quad 77 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \quad 1 \\ \underline{8 \quad 2} \\ 7 \quad 2 \end{array}$
--	---	--

In der ersten Spalte stehen die beiden Faktoren, in der zweiten Spalte die Ergänzungen zu 1000, 100 bzw. 10.

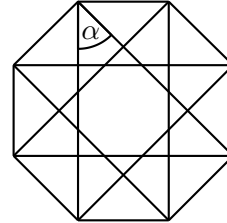
Darunter stehen die Differenzen $889 - 2$, $89 - 7$ bzw. $8 - 1$ und daneben das Produkt der Zahlen in der zweiten Spalte.

Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Rechenmethode für das Produkt zweier n -stelliger Zahlen a und b .

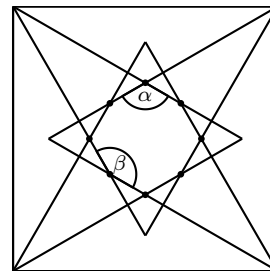
3. a) Eine 25 m lange Leiter lehnt an einer senkrechten Wand eines Gebäudes. Der Fuß der Leiter ist 7 m von der Wand entfernt. Die Spitze der Leiter rutscht an der Wand 4 m tiefer. Um wie viel Meter rutscht dabei der Fuß der Leiter?

b) Winkel im Sternachteck

- (i) Bestimmen Sie den Winkel α in dem regulären Achteck.



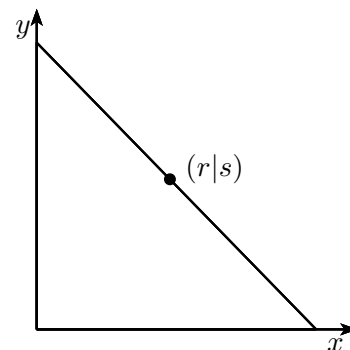
- (ii) Über jeder Seite eines Quadrates werden nach innen gleichseitige Dreiecke konstruiert. Dabei entsteht ein Achteck, das in jedem der vier Dreiecke enthalten ist. Bestimmen Sie die Innenwinkel α und β des Achtecks.



4. Gegeben ist ein Punkt $(r|s)$ im ersten Quadranten. Berechnen Sie die Gerade durch $(r|s)$, die mit den Achsen ein Dreieck kleinster Fläche bildet.

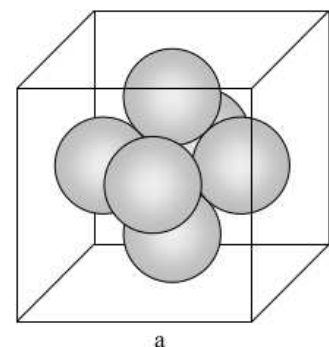
Hinweis: Zur Lösung dieser Extremwertaufgabe ohne Differenzialrechnung ist folgende Formel hilfreich:

$$\frac{u^2}{u-v} = \left(\sqrt{u-v} - \frac{v}{\sqrt{u-v}} \right)^2 + 4v$$



5. In einen Würfel mit der Kantenlänge a werden sechs gleich große Kugeln so eingeschrieben, dass jede Kugel vier Kugeln und eine Seitenfläche des Würfels im Mittelpunkt berührt.

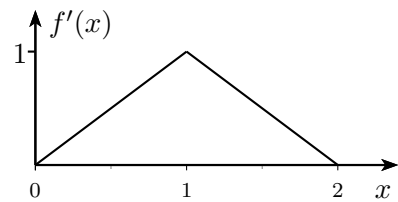
- a) Berechnen Sie den Radius R der Kugeln in Abhängigkeit von a .
- b) Berechnen Sie den Radius r der kleinen Kugel, die in die Lücke zwischen den sechs großen Kugeln passt.



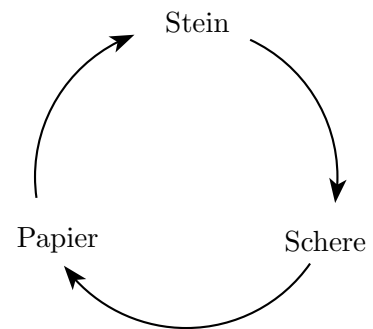
6. a) Zeichnen Sie im x - y -Koordinatensystem die Funktion $g(x) = \max(-1, 2 - |x - 2|)$, $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Hinweis: } \max(a, b) = \begin{cases} a & , a \geq b \\ b & , a < b \end{cases}$$

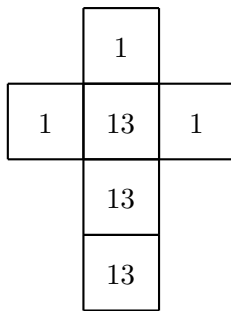
- b) Gegeben ist der Graph der Ableitung $f'(x)$, $0 \leq x \leq 2$.
Gesucht ist die Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(2) = 2$.
Zeichnen Sie f .



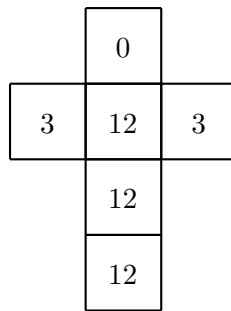
7. Für reelle Zahlen ist die Relation "... ist kleiner als ..." transitiv, d. h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
Das Spiel "Stein-Schere-Papier" ist ein Beispiel für eine nichttransitive Relation:
In der Abbildung bedeutet der Pfeil "... schlägt ...".



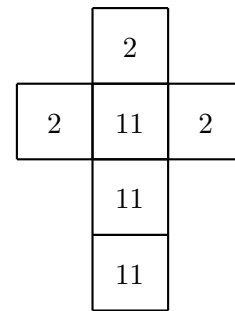
- a) Untersuchen Sie die folgenden Würfel,



A



B



C

indem Sie jeweils zwei Würfel auswählen und berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit einer von beiden gewinnt.

- b) Welcher Würfel gewinnt, wenn alle drei gleichzeitig geworfen werden?

8. a) 11% von 13 sind 13% von welcher Zahl x ?
- b) Einige Hundebesitzer gehen mit ihren Hunden spazieren.
Die Summe aller Beine (von Mensch und Tier) ist 16 mehr als zwei Mal die Anzahl der Köpfe.
Berechnen Sie, wie viele Hunde ausgeführt werden.
- c) Eine Firma möchte ein 120 m^2 großes Büro für ein Jahr mieten. Es gibt zwei Angebote:
- Räume zwischen $100 - 130 \text{ m}^2$ kosten 800 Euro pro Monat
 - Räume zwischen $35 - 260 \text{ m}^2$ kosten 82 Euro pro m^2 und Jahr.

Berechnen Sie, welches Angebot für die Firma billiger ist.