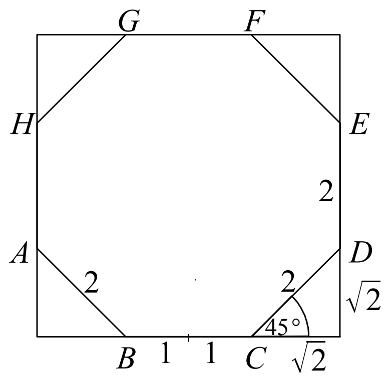
# Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2017 am 15.02.2017




1. a) $A\left(-1-\sqrt{2}|\sqrt{2}\right)$, $D\left(1+\sqrt{2}|\sqrt{2}\right)$, $E\left(1+\sqrt{2}|\sqrt{2}+2\right)$

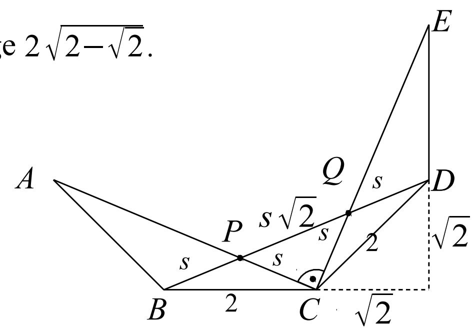
b) Gerade $AC$: $y=\frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(x-1)=(1-\sqrt{2})(x-1)$.

Gerade $BD$: $y=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(x+1)=(\sqrt{2}-1)(x+1)$.

Gerade $CE$: $y=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(x-1)=(\sqrt{2}+1)(x-1)$.

$P\left(0|\sqrt{2}-1\right)$, $Q\left(\sqrt{2}|1\right)$

c) 1. Lösung:
Das kleine Achteck hat die Seite $PQ$ mit der Länge $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.




2. Lösung:
Es gilt
$BD^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=4\left(2+\sqrt{2}\right)$ und
$BD=s+s\sqrt{2}+s=s\left(2+\sqrt{2}\right)$.
Also ist $s=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$
und somit $PQ=s\sqrt{2}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

2. a) 1. Lösung:
Aus $4\cdot(10H+E)=10A+H$ folgt $39H+4E=10A$. Also muss $H$ gerade sein.
Wegen $4H\le 9$ ist $H=2$ und $39+2E=5A$. Also ist $39+2E$ durch 5 teilbar.
Wegen $5A\le 45$ folgt $A=9$ und $E=3$.

2. Lösung:
Aus $4H<10$ folgt $H=1$ oder $H=2$.
Da $4E$ nicht auf 1 enden kann, ist $H=2$. Also ist $E=3$ oder $E=8$.
Wegen $A\le 9$ ist $E=3$ und $A=9$.

b) Aus $a^2-b^2=105$ folgt $(a+b)(a-b)=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$.

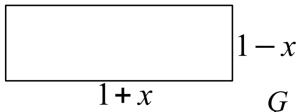
Aus der Tabelle

| $a$-$b$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $a$+$b$ | 105 | 35 | 21 | 15 |

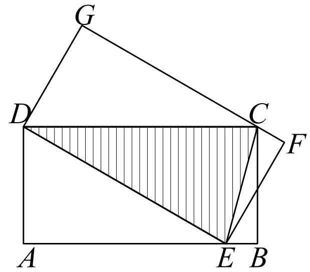
folgt

| $a$ | 53 | 19 | 13 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | 52 | 16 | 8 | 4 |

3. a) Das abgebildete Rechteck hat den Umfang 4 und die Fläche $(1+x)(1-x) = 1-x^2 \leq 1$.



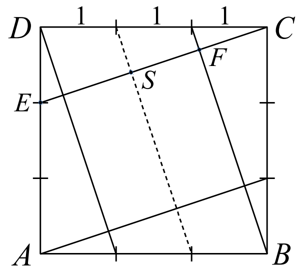

b) Die Rechtecksflächen sind gleich groß, denn die Fläche des schraffierten Dreiecks *DEC* ist halb so groß wie die Fläche von *ABCD* und *DEFG*.




c) <u>1. Lösung:</u>
Das Quadrat habe o. B. d. A. die Seitenlänge 3.
Sei $s$ die Seitenlänge des schraffierten Quadrates.

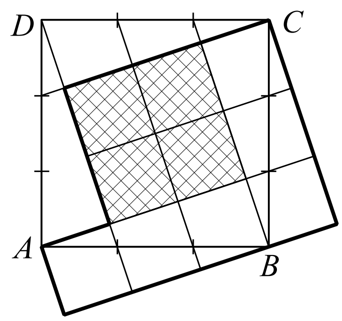
Dann ist $CE = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ und $CF = \frac{s}{2}$.

Also gilt $\frac{\frac{s}{2}}{1} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ und somit $\frac{s^2}{9} = \frac{2}{5}$.




<u>2. Lösung:</u>
Die stark umrandete Fläche ist die von *ABCD* und besteht aus 10 kleinen Quadraten.
Das schraffierte Quadrat besteht aus 4 kleinen Quadraten.

Also ist das Verhältnis $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.



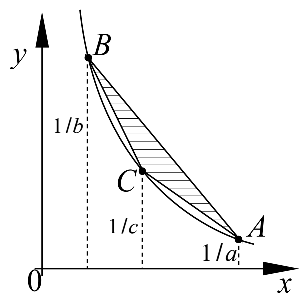

4. <u>1. Lösung:</u>
Die Fläche des Dreiecks *ABC* ist maximal, wenn der Abstand von *C* zu *AB* maximal ist, d. h. wenn die Tangente in *C* parallel zu *AB* ist.

Aus $-\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}$ folgt $c = \sqrt{ab}$. Also $C\left(\sqrt{ab}\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$.

<u>2. Lösung:</u>
Die Dreiecksfläche kann auch als Differenz von von Trapezflächen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a-b)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(c-b)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(a-c)\\ &= \frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{a+b}{ab}-\frac{c}{ab}-\frac{1}{c}\right)\\ &= \frac{1}{2}(a-b)-\left(\frac{a+b}{ab}-\left(\frac{\sqrt{c}}{ab}-\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)\end{aligned}$$

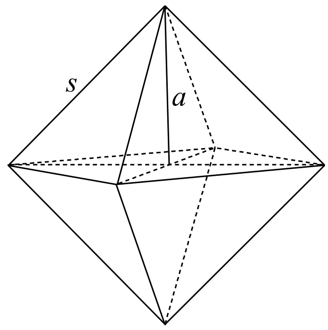
Die Fläche wird maximal für $\frac{\sqrt{c}}{ab} = \frac{\sqrt{1}}{c}$, also für $c = \sqrt{ab}$.



5. Kantenlänge: $s = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$

Oberfläche: $O = 8\cdot\frac{1}{2}s\cdot\frac{s}{2}\sqrt{3} = 2\cdot s^2\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$

Volumen: $V = 2\cdot\frac{1}{3}s^2\cdot a = \frac{2\cdot 1}{2}2a^2\cdot a = \frac{4}{3}a^3$

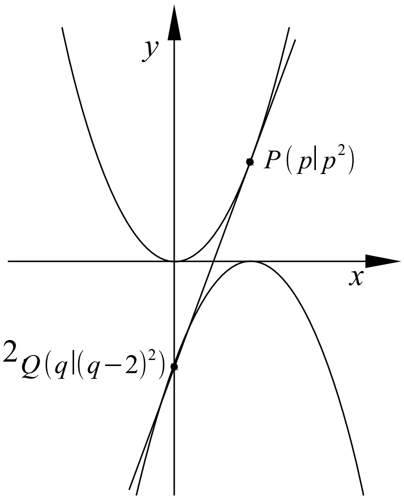



6. Für die Steigung $m$ der gemeinsamen Tangente an die Parabeln $y = x^2$ und $y = -x^2+4x-4 = -(x-2)^2$ gilt
$m = 2p = -2q+4$ und
$m = \dfrac{p^2+(q-2)^2}{p-q}$ mit $p \neq 0$ und $q \neq 2$.

Mit $p = -q+2$ folgt $m = \dfrac{(-q+2)^2+(q-2)^2}{-q+2-q} = \dfrac{(q-2)^2}{1-q}$.

Aus $\dfrac{(q-2)^2}{1-q} = -2(q-2)$ folgt $|$wegen $q \neq 2|$ $q = 0$ und $p = 2$

Also sind $P(2|4)$, $Q(0|-4)$ und die Tangente $y = 4x-4$.




7. a) (i) Aus der Tabelle

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 1 | 6 | 15 | 28 | 45 |
| $S_{n+1}-S_n$ | 5 | 9 | 13 | 17 | |
| $\frac{S_n}{n}$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

folgt
(ii) $S_{n+1}-S_n = 4n+1$
(iii) $S_n = n(2n-1)$

b) Aus der Tabelle

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^n$ | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 |
| Rest | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 |

folgt, dass die Folge der Reste die Periode 6 hat.
Wegen $2017 = 336\cdot 6+1$ ist der gesuchte Rest 3.

c) Weder der Gregorianische noch der Julianische Kalender haben das Jahr 0.
Dies bedeutet, dass nach dem Jahr 1 v. Chr. unmittelbar das Jahr 1 n. Chr. folgt.
Daher ist das Kind ein Jahr alt geworden.
Die 2000-Jahr-Feier von Augsburg hätte 1986 stattfinden müssen.

8. a) 4% von 100g sind 4g Trockenmasse.
Dies sind nach der Wasseraufnahme 2%.
Also wiegt der Pilz nun 200g.

b) Der Zug fährt $\frac{180\,m}{90\,sec}=2\,\frac{m}{sec}$ .
Die Spitze des Zuges braucht $\frac{300\,m}{2\,m/sec}=150\,sec$ um die Brücke zu überqueren.
Allerdings muss auch noch das Zugende die Brücke überqueren, d. h. weitere $180\,m$ müssen noch zurück gelegt werden.
Dazu braucht der Zug noch 90 sec.
Also braucht er $150\,sec+90\,sec\ =\ 240\,sec\ =\ 4\,min$.

c) Unter den 12 Monaten eines Jahres gibt es 7 mit 31 Tagen, 4 mit 30 Tagen und einen mit 28 Tagen.
Daher ist $(x, y, z) = (1, 4, 7)$ eine Lösung der Gleichung.