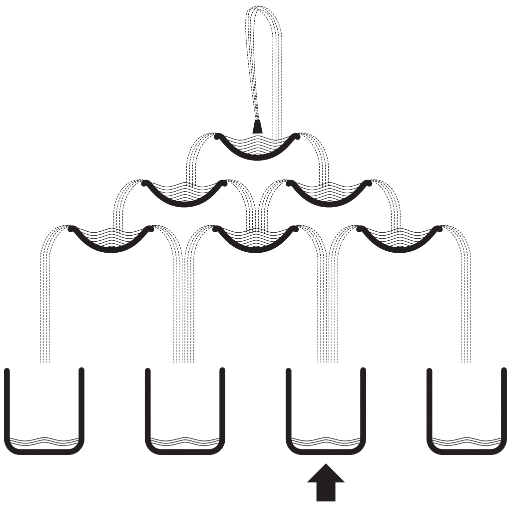
Tag der Mathematik 2016

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Tag der Mathematik 2016

Aufgabe G1 mit Lösung



Der römische Brunnen
Aufsteigt der Strahl und fallend gießt
Er voll der Marmorschale Rund,
Die, sich verschleiernd, überfließt
In einer zweiten Schale Grund;
Die zweite gibt, sie wird zu reich,
Der dritten wallend ihre Flut,
Und jede nimmt und gibt zugleich
Und strömt und ruht.
— *Conrad Ferdinand Meyer*

Aufgabe G1

Die oberste Schale eines römischen Brunnens wird pro Minute mit 1000 Liter Wasser gespeist. Aus jeder Schale fließen links $\frac{4}{5}$ und rechts $\frac{1}{5}$ des Wassers in eine darunter liegende Schale.

Wie lange dauert es, bis in das durch den Pfeil markierte Becken 1000 Liter geflossen sind?

Lösung

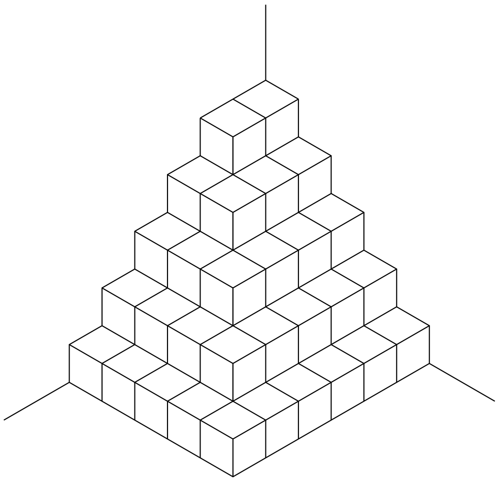
$$\begin{tikzcd}
 & 1000\,\mathrm{l/min} \arrow[dl, "\frac{4}{5}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{5}"] & & \\
800 \arrow[dr, "\frac{1}{5}"] & & 200 \arrow[dl, "\frac{4}{5}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{5}"] & \\
 & 160+160 \arrow[dr, "\frac{1}{5}"] & & 40 \arrow[dl, "\frac{4}{5}"'] \\
 & & 64+32 = 96\,\mathrm{l/min} &
\end{tikzcd}$$

Die benötigte Zeit beträgt $\frac{1000}{96}$ min $= (10 + \frac{5}{12})$ min $=$ 10 min 25 sec.

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-530306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe G2

In einer Zimmerecke sind mehrere Lagen von Würfeln aufgestapelt. Die Abbildung zeigt diese Würfelpyramide. Nicht alle Würfel sind sichtbar.



a) Aus wie vielen Würfeln besteht die Pyramide?

b) Die sichtbaren Flächen der Würfel werden rot lackiert. Wie viele Würfel haben 0, 1, 2 bzw. 3 rote Flächen?

c) Ein Würfel wird zufällig ausgewählt und dann gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, eine rote Fläche zu erhalten?

Lösung

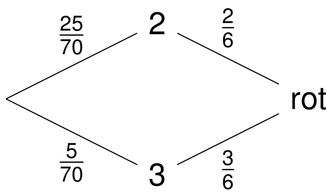
a) 70

b)

Rote Flächen	0	1	2	3
Würfel	40	0	25	5

c) *1. Lösung:*

Im Baumdiagramm werden zuerst die Würfel mit 2 bzw. 3 roten Flächen ausgewählt und danach gewürfelt:

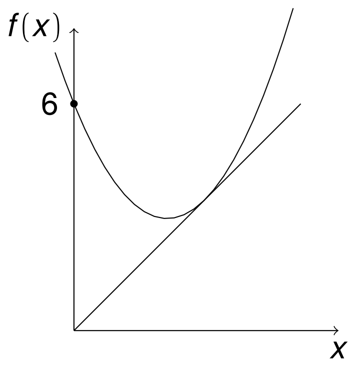


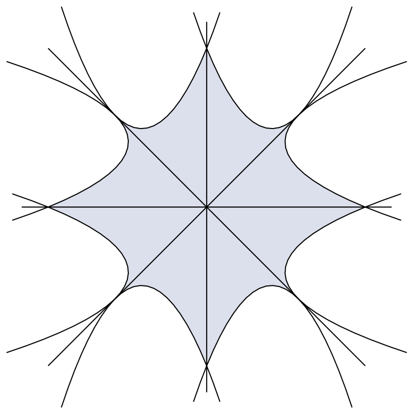
$$p = \frac{25}{70} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{70} \cdot \frac{3}{6} = \frac{13}{84}.$$

2. Lösung:
Es gibt $70 \cdot 6$ Würfelflächen. Davon sind $2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 = 65$ rot. Also

$$p = \frac{65}{70 \cdot 6} = \frac{13}{84}.$$

Aufgabe G3





a) Gegeben ist die Parabel

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + 6, \quad a > 0.$$

Für welches a berührt die Parabel die 1. Winkelhalbierende?

Berechnen Sie auch die Koordinaten des Berührpunktes.

b) Diese Parabel wird mehrfach an den Winkelhalbierenden und den Koordinatenachsen gespiegelt (vgl. Abbildung).

Wie groß ist die eingefärbte Fläche?

Lösung

a) Aus $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ folgen $\frac{1}{2}x^2 - ax + 6 = x$ und $x - a = 1$.

Also $x = 2\sqrt{3}$ und $a = 2\sqrt{3} - 1$.

Der Berührpunkt hat die Koordinaten $(2\sqrt{3}\,|\,2\sqrt{3})$.

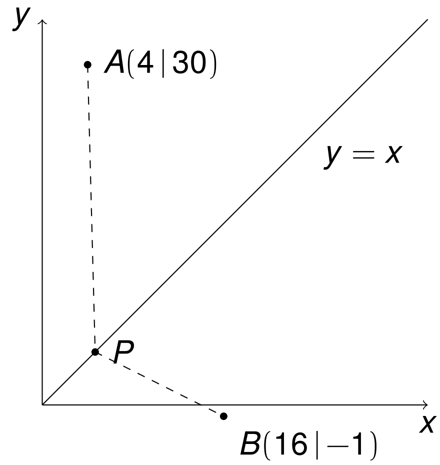
b) Die Fläche zwischen Parabel, 1. Winkelhalbierenden und y-Achse:

$$\int_0^{2\sqrt{3}} (f(x) - x)\,dx = \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + 6\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \sqrt{3}x^2 + 6x\right]_0^{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Damit ist die Gesamtfläche $8 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$.

Aufgabe G4

Welche Punkte P der Geraden $y = x$ haben von $A(4\,|\,30)$ die doppelte Entfernung wie von $B(16\,|\,-1)$?



Lösung

Aus $PA = 2 \cdot BP$ bzw. $PA^2 = 4 \cdot PB^2$ folgt

$(x-4)^2+(x-30)^2 = 4 \cdot \big((x-16)^2+(x+1)^2\big)$

und somit

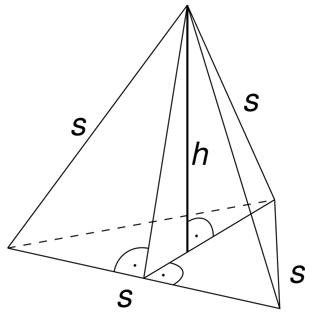
$$3x^2 - 26x + 56 = 0.$$

Wegen

$$3x^2 - 26x + 56 = (x-4)(3x-14)$$

folgt $P(4\,|\,4)$ oder $P(\frac{14}{3}\,|\,\frac{14}{3})$.

Aufgabe E1



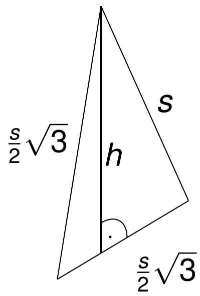
Gegeben ist ein Tetraeder mit der Kantenlänge s.

Berechnen Sie

a) die Höhe h und

b) das Volumen V des Tetraeders.

Lösung



a) $h^2 = s^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{2}{3}s^2$.

Also ist $h = \frac{s}{3}\sqrt{6}$.

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} \cdot h$
$= \frac{\sqrt{2}}{12}s^3$.

Aufgabe E2

Ein zuerst leeres Becken mit einem Fassungsvermögen von 100 hl wird über einen konstanten Zufluss in $8\frac{3}{4}$ Stunden gefüllt.

Das Entleeren über einen Auslauf dauert 11 Stunden, dabei wird eine konstante Ausflussgeschwindigkeit vorausgesetzt.

Wie lange dauert es, bis das Becken gefüllt ist, wenn der Auslauf geöffnet ist?

Lösung

Zufluss pro Stunde: $\frac{100}{8{,}75} = \frac{100 \cdot 4}{35}$.

Abfluss pro Stunde: $\frac{100}{11}$.

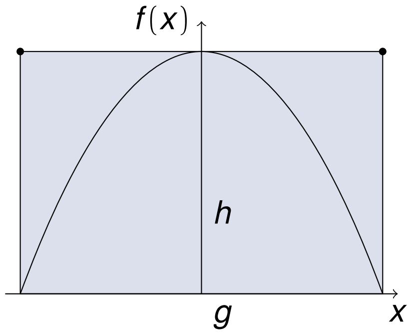
Differenz: $\frac{100 \cdot 4}{35} - \frac{100}{11} = \frac{180}{77}$ (hl pro Stunde).

Füllzeit: $\frac{100 \cdot 77}{180} = \frac{385}{9} = 42\frac{7}{9}$ Stunden.

Aufgabe E3

Gegeben ist die Parabel $f(x) = -ax^2 + b$ mit $a,b > 0$.

Zeigen Sie, dass die Fläche zwischen Parabel und x-Achse $\frac{2}{3}$ der Fläche des Rechtecks mit der Grundseite g und der Höhe h ist (vgl. Abbildung).



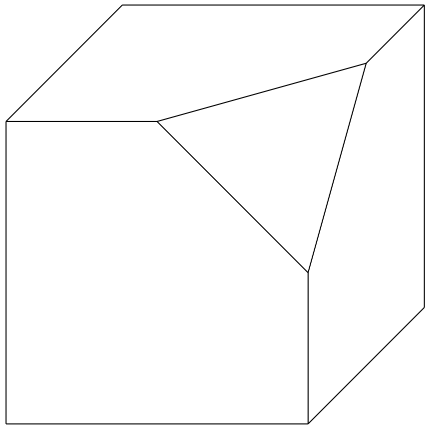
Lösung

Höhe $h = f(0) = b$ und Grundseite $g = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Rechtecksfläche: $$A_R = 2 \cdot b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Parabelfläche:
$$\begin{aligned} A_P &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (-ax^2 + b)dx \\ &= 2\Big[-\frac{a}{3}x^3 + bx\Big]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \\ &= 2 \cdot \Big(-\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{b}{a}}\Big) \\ &= \frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{2}{3}A_R \end{aligned}$$

Aufgabe E4

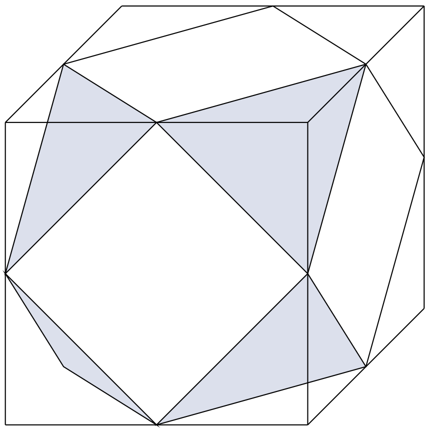


Von einem Würfel (Kantenlänge 2) werden die acht Ecken so abgeschnitten, dass die Schnittebene durch die Mitten benachbarter Kanten geht. In der Abbildung ist eine Ecke abgeschnitten.

a) Wie viele Flächen (f), Kanten (k) und Ecken (e) hat der Körper?

b) Berechnen Sie seine Oberfläche O und sein Volumen V.

Lösung



a) Es ist $f = 6 + 8 = 14$, $k = 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4 = 24$ und $e = 12$.

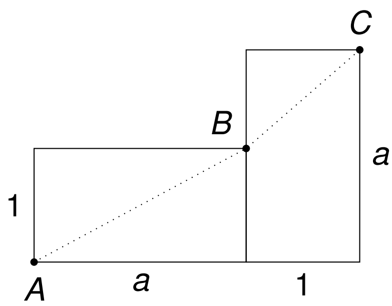
b) Der Körper besteht aus 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken. Also gilt

$$O = 6 \cdot (\sqrt{2})^2 + 8 \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$$
$$V = 2^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 1^2 \cdot 1 = \frac{20}{3}.$$

Aufgabe H1

Zwei $1 \times a$ Rechtecke werden wie abgebildet aneinander gelegt.

Wie muss a gewählt werden, damit A, B und C kollinear sind, d.h. damit A, B und C auf einer Geraden liegen?



Lösung

1. Lösung:
Aus $\frac{a}{1} = \frac{a+1}{a}$ folgt $a^2 = a + 1$, also $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

2. Lösung:
In einem geeigneten Koordinatensysstem mit dem Ursprung A hat die Gerade durch A und B die Gleichung $y = \frac{1}{a}x$ und die Punktprobe mit $C(a+1 \,|\, a)$ führt zu der Gleichung $a = \frac{1}{a}(a+1)$.

3. Lösung:
Wenn A, B und C kollinear sind, dann muss für die Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

gelten: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, also

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt $k = a$ und somit $1 = a(a-1)$.

Die Gleichung $a^2 - a - 1 = 0$ hat die positive Lösung $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Aufgabe H2

Schreibt man die natürlichen Zahlen hintereinander, so entsteht die Folge der Ziffern

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,0,1,1,1,2,1,3,1,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{19. Stelle}}}{4},1,5,\ldots$$

An der 19. Stelle steht dann die Ziffer 4.

Welche Ziffer steht an der 2016. Stelle?

Lösung

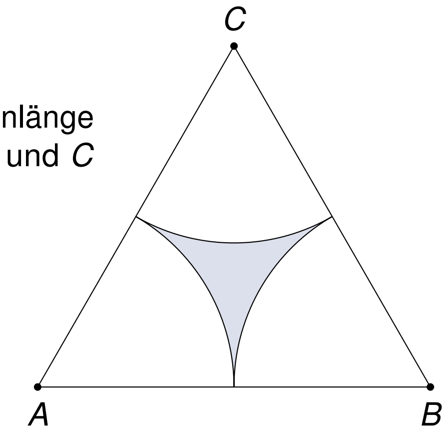
Die Zahlen $1,\ldots,9, 10,\ldots,99$ liefern $9+2\cdot 90 = 189$ Stellen.

Es gilt $\frac{2016-189}{3} = \frac{1827}{3} = 609$.

Die 609 Zahlen $100,\ldots,708$ liefern $3\cdot 609 = 1827$ Stellen.

Also ist die 2016. Stelle eine 8.

Aufgabe H3



In einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge $4a$ begrenzen Kreisbögen (Radius $2a$) um A, B und C das eingefärbte Gebiet.

Berechnen Sie dessen Fläche.

Lösung

$$\frac{(4a)^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{6}\pi(2a)^2 = 2a^2(2\sqrt{3} - \pi).$$

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-530306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H4

Im alten Ägypten wurden Brüche als Summe von Stammbrüchen geschrieben, d.h. Brüche mit dem Zähler 1.

Zum Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Schreiben Sie $\frac{3}{11}$ als Summe von zwei Stammbrüchen.

Lösung

1. Lösung:
Aus $\frac{3}{11} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ folgt $3ab = 11 \cdot (a+b)$.

Also ist b (oder a) durch 11 teilbar: $b = 11 \cdot k$.

Aus $3ak = a + 11k$ folgt, dass a durch k teilbar ist: $a = q \cdot k$.

Aus $3qk = q + 11$ folgt $q = 1$ und $k = 4$, also $\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}$.

2. Lösung:
Der größte Stammbruch kleiner als $\frac{3}{11} = 0.\overline{27}$ ist $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Aus $\frac{3}{11} - \frac{1}{4} = \frac{1}{44}$ folgt $\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}$.

3. Lösung:
Allgemein gilt $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Für $n = 11$ folgt $\frac{1}{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{11 \cdot 12}$ und somit $\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}$.

Aufgabe H5

Bei der Addition von vier gleichen zweistelligen Zahlen steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{r} HE \\ HE \\ HE \\ +\ HE \\ \hline AH \end{array}$$

Bestimmen Sie H, E und A.

Lösung

1. Lösung:
Aus $4 \cdot (10H + E) = 10A + H$ folgt $39H + 4E = 10A$. Also muss H gerade sein.

Wegen $4H \leqslant 9$ ist $H = 2$ und $39 + 2E = 5A$. Also ist $39 + 2E$ durch 5 teilbar.

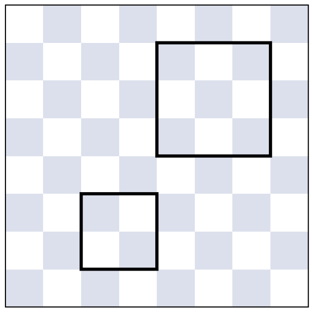
Wegen $5A \leqslant 45$ folgt $A = 9$ und $E = 3$.

2. Lösung:
Aus $4H < 10$ folgt $H = 1$ oder $H = 2$.

Da $4E$ nicht auf 1 enden kann, ist $H = 2$. Also ist $E = 3$ oder $E = 8$.

Wegen $A \leqslant 9$ ist $E = 3$ und $A = 9$.

Aufgabe H6



Wie viele Quadrate kann man auf dem Schachbrett entdecken?

Ein 3×3 und 2×2 Quadrat sind beispielhaft eingezeichnet.

Lösung

Quadrat	1×1	2×2	3×3	...	7×7	8×8
Anzahl	8^2	7^2	6^2	...	2^2	1^2

Summe: $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$.

Aufgabe H7

Wie viele Teiler hat 2016?

Lösung

Wegen $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ hat jeder Teiler die Form $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ mit $a = 0,1,2,3,4,5$, $b = 0,1,2$ und $c = 0,1$.

Also gibt es $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ Teiler.

Aufgabe H8

Gegeben sind fünf Geraden und zwei Kreise in der Ebene.

Wie groß ist die maximale Anzahl der Schnittpunkte?

Lösung

Maximale Anzahl der Schnittpunkte von

- fünf Geraden: $\binom{5}{2} = 10$,
- zwei Kreisen und einer Geraden: 4, also insgesamt $5 \cdot 4 = 20$,
- zwei Kreisen: 2.

Also gibt es maximal $10 + 20 + 2 = 32$ Schnittpunkte.

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-530306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de